



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

Math 2659.01.5



SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE BEQUEST OF

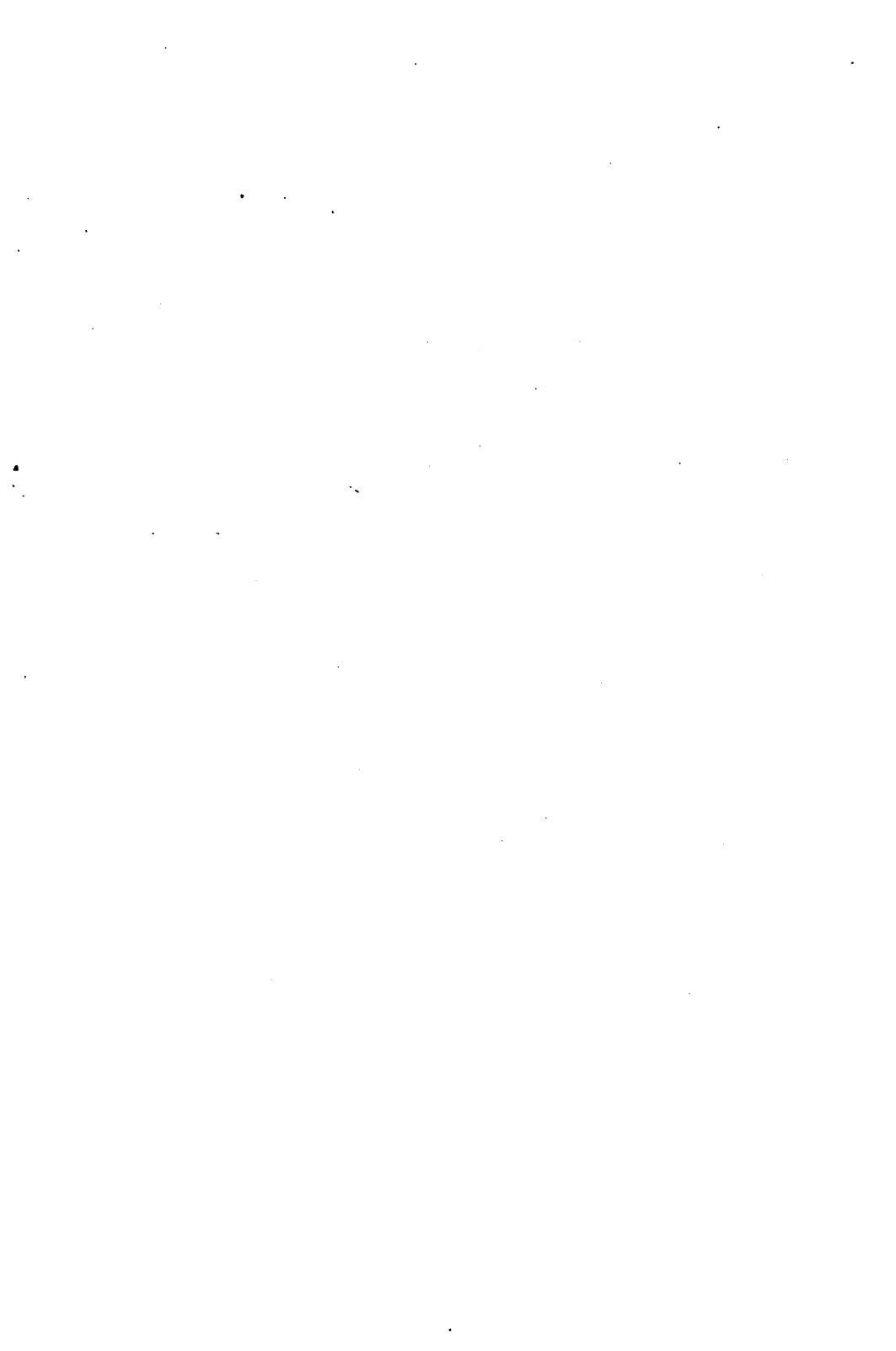
FRANCIS B. HAYES

(Class of 1889)

This fund is \$10,000 and its income is to be used

"For the purchase of books for the Library"

Mr. Hayes died in 1884





4657

# DIE BINOMIALKOEFFICIENTEN

IN VERBINDUNG MIT  
FIGURIERTEN ZAHLEN UND ARITHMETISCHEN  
REIHEN HÖHERER ORDNUNG.

---

VON  
PAUL VON SSCHAEWEN,  
PROFESSOR AM EVANG. GYMNASIUM ZU GLOGAU.



GLOGAU.  
CARL FLEMMING, VERLAG,  
BUCH- UND KUNSTDRUCKEREI, A. G.

1901.

Math 2659.01.5

Hauges fund.

305

## Vorwort.

---

Die nachstehende Abhandlung erschien vor zwanzig Jahren als Beilage des Programms des Gymnasiums zu Saarbrücken, wo der Verfasser von 1878—1882 als ordentlicher Lehrer angestellt war. Da alle damals hergestellten Exemplare vollständig vergriffen sind, die Abhandlung aber vielfach begehrt wird, erfolgt dieser unveränderte Abdruck jener Programmbeilage.

Glogau, im Mai 1901.

**P. v. Schaewen.**





# Die Binomialkoeffizienten

in Verbindung mit figurirten Zahlen und arithmetischen  
Reihen höherer Ordnung.

## § 1.

Für jedes ganzzahlige  $n$  bestehen bekanntlich die beiden Reihenentwicklungen von  $\cos(n\varphi)$  nach Funktionen des einfachen Winkels

$$\cos(n\varphi) = 2^{n-1} \cos^n \varphi - n \cdot 2^{n-3} \cos^{n-2} \varphi + \frac{n}{2} \binom{n-3}{1} \cdot 2^{n-5} \cos^{n-4} \varphi - \frac{n}{3} \binom{n-4}{2} \cdot 2^{n-7} \cos^{n-6} \varphi + \dots + (-1)^p \frac{n}{p} \binom{n-p-1}{p-1} \cdot 2^{n-2p-1} \cos^{n-2p} \varphi + \dots$$

$$\text{und } \cos(n\varphi) = \cos^n \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \binom{n}{6} \cos^{n-6} \varphi \sin^6 \varphi + \dots + (-1)^p \binom{n}{2p} \cos^{n-2p} \varphi \sin^{2p} \varphi + \dots$$

Die erste Reihe enthält nur Potenzen von  $\cos \varphi$ , die zweite ausser den Potenzen von  $\cos \varphi$  noch die geraden Potenzen von  $\sin \varphi$ .

Setzt man nun in der zweiten Reihe

$$\sin^{2h} \varphi = (1 - \cos^2 \varphi)^h$$

und entwickelt nach dem binomischen Lehrsatz, so erhält man noch eine zweite Reihe für  $\cos(n\varphi)$ , welche nur die Potenzen von  $\cos \varphi$  enthält. Beide Darstellungen von  $\cos(n\varphi)$  müssen identisch gleich sein, d. h. es müssen die Koeffizienten gleicher Potenzen von  $\cos \varphi$  in beiden Reihen einander gleich sein. Durch Gleichsetzung der Koeffizienten von  $\cos^{n-2h} \varphi$  erhält man die Gleichung

$$\binom{h}{0} \binom{n}{2h} + \binom{h+1}{1} \binom{n}{2h+2} + \binom{h+2}{2} \binom{n}{2h+4} + \dots$$

$$= \frac{n}{h} \binom{n-h-1}{h-1} \cdot 2^{n-2h-1}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Summe von Produkten aus den figurierten Zahlen  $h$ -ter Ordnung<sup>1)</sup> und Binomialkoeffizienten  $n$ -ter Potenz mit geradem Index. Für die rechte Seite kann man, um die Unbestimmtheit für  $h = 0$  zu vermeiden, auch schreiben

$$\frac{n}{n-2h} \binom{n-h-1}{h} \cdot 2^{n-2h-1}.$$

Wenn man für  $h$  der Reihe nach 0, 1, 2, 3, . . . setzt, so gewinnt man die Gleichungen

$$a) \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \binom{n}{8} + \binom{n}{10} + \dots = 2^{n-1}$$

$$b) \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + 3\binom{n}{6} + 4\binom{n}{8} + 5\binom{n}{10} + \dots = n \cdot 2^{n-3}$$

$$c) \binom{n}{4} + 3\binom{n}{6} + 6\binom{n}{8} + 10\binom{n}{10} + \dots = \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} \cdot 2^{n-5}$$

$$d) \binom{n}{6} + 4\binom{n}{8} + 10\binom{n}{10} + \dots = \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2^{n-7}$$

u. s. w.

Aus diesen Gleichungen erhält man unzählige andere, wenn man sie in geeigneter Weise kombiniert. So erhält man durch gehörige Kombination z. B. Reihen, welche die figurierten Zahlen einer bestimmten Ordnung und die sämtlichen Binomialkoeffizienten  $n$ -ter Potenz mit geradem Index enthalten. Es liefert

$a + b$ :

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{4} + 4\binom{n}{6} + 5\binom{n}{8} + \dots = (n+4) \cdot 2^{n-3}$$

$a + 2b + c$ :

$$\binom{n}{0} + 3\binom{n}{2} + 6\binom{n}{4} + 10\binom{n}{6} + 15\binom{n}{8} + \dots$$

$$= \frac{n^2 + 13n + 32}{1 \cdot 2} \cdot 2^{n-5}$$

a + 3b + 3c + d:

$$\binom{n}{0} + 4 \binom{n}{2} + 10 \binom{n}{4} + 20 \binom{n}{6} + 35 \binom{n}{8} + \dots$$

$$= \frac{n^3 + 27 n^2 + 200 n + 384}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2^{n-7}$$

u. s. w.

## § 2.

Allgemein gelten, wenn n eine ganze Zahl ist, für  $\frac{\sin(n\varphi)}{\sin\varphi}$  die beiden Reihenentwicklungen nach Funktionen des einfachen Winkels

$$\frac{\sin(n\varphi)}{\sin\varphi} = 2^{n-1} \cos^{n-1}\varphi - \binom{n-2}{1} 2^{n-3} \cos^{n-3}\varphi + \binom{n-3}{2} 2^{n-5} \cos^{n-5}\varphi -$$

$$- \binom{n-4}{3} 2^{n-7} \cos^{n-7}\varphi + \dots + (-1)^p \binom{n-p-1}{p} 2^{n-2p-1} \cos^{n-2p-1}\varphi + \dots$$

und  $\frac{\sin(n\varphi)}{\sin\varphi} = \binom{n}{1} \cos^{n-1}\varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3}\varphi \sin^2\varphi + \binom{n}{5} \cos^{n-5}\varphi \sin^4\varphi -$

$$- \binom{n}{7} \cos^{n-7}\varphi \sin^6\varphi + \dots + (-1)^p \binom{n}{2p+1} \cos^{n-2p-1}\varphi \sin^{2p}\varphi + \dots$$

Wenn man nun ebenso wie in § 1 verfährt, wenn man nämlich in der zweiten Reihe

$$\sin^{2h}\varphi = (1 - \cos^2\varphi)^h$$

setzt und nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt, so erhält man eine zweite Darstellung von  $\frac{\sin(n\varphi)}{\sin\varphi}$  als Reihe, welche nur die Potenzen von  $\cos\varphi$  enthält. Setzt man in dieser und der ersten Reihe die Koeffizienten von  $\cos^{n-2h}\varphi$  einander gleich, so wird die Gleichung gewonnen<sup>2)</sup>

$$\binom{h}{0} \binom{n}{2h+1} + \binom{h+1}{1} \binom{n}{2h+3} + \binom{h+2}{2} \binom{n}{2h+5} + \dots = \binom{n-h-1}{h} \cdot 2^{n-2h-1}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Summe von Produkten aus den figurirten Zahlen h-ter Ordnung und Binomial-

koëfficienten n-ter Potenz mit ungeradem Index. Wenn man für h der Reihe nach 0, 1, 2, 3, . . . setzt, so erhält man die Gleichungen

$$a) \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \binom{n}{7} + \binom{n}{9} + \binom{n}{11} + \dots = 2^{n-1}$$

$$b) \binom{n}{3} + 2\binom{n}{5} + 3\binom{n}{7} + 4\binom{n}{9} + 5\binom{n}{11} + \dots = (n-2) \cdot 2^{n-3}$$

$$c) \binom{n}{5} + 3\binom{n}{7} + 6\binom{n}{9} + 10\binom{n}{11} + \dots = \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2} \cdot 2^{n-5}$$

$$d) \binom{n}{7} + 4\binom{n}{9} + 10\binom{n}{11} + \dots = \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2^{n-7}$$

u. s. w.

Auch aus diesen Gleichungen können beliebig viele andere durch Kombination abgeleitet werden. So kann man z. B. die Gleichungen aufstellen, welche die figurirten Zahlen einer bestimmten Ordnung und die sämtlichen Binomialkoëfficienten n-ter Potenz mit ungeradem Index enthalten. Es giebt

a + b:

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{3} + 3\binom{n}{5} + 4\binom{n}{7} + 5\binom{n}{9} + \dots = (n+2) \cdot 2^{n-3}$$

a + 2b + c:

$$\binom{n}{1} + 3\binom{n}{3} + 6\binom{n}{5} + 10\binom{n}{7} + 15\binom{n}{9} + \dots = \frac{n^2 + 9n + 12}{1 \cdot 2} \cdot 2^{n-5}$$

a + 3b + 3c + d:

$$\begin{aligned} & \binom{n}{1} + 4\binom{n}{3} + 10\binom{n}{5} + 20\binom{n}{7} + 35\binom{n}{9} + \dots \\ & = \frac{n^3 + 21n^2 + 110n + 120}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2^{n-7} \end{aligned}$$

u. s. w.

### § 3.

Das Gesetz, nach welchem die Gleichungen a, b, c, . . . für diesen speciellen Zweck zu kombinieren sind, ist folgendes. Man muss, wenn die Reihe, welche die figurirten Zahlen h-ter Ord-

nung und die sämtlichen Binomialkoeffizienten  $n$ -ter Potenz mit ungeradem Index enthält, gebildet und summiert werden soll, kombinieren

$$a + \binom{h}{1} b + \binom{h}{2} c + \binom{h}{3} d + \dots$$

Dasselbe Bildungsgesetz gilt offenbar für die Reihen am Schlusse von § 1, nur treten  $a, b, c, \dots$  an die Stelle von  $a, b, c, \dots$ .

Beweis. Die Glieder der zu bildenden Reihe haben die allgemeine Form

$$\binom{h+k}{h} \binom{n}{2k+1}$$

$\binom{n}{2k+1}$  hat in den Reihen  $a, b, c, d, \dots$  den Faktor resp.  $\binom{k}{0}, \binom{k}{1}, \binom{k}{2}, \binom{k}{3}, \dots$ . Wenn demnach diese Reihen, wie angegeben, kombiniert werden, so erhält  $\binom{n}{2k+1}$  in der Summe den Faktor

$$\binom{h}{0} \binom{k}{0} + \binom{h}{1} \binom{k}{1} + \binom{h}{2} \binom{k}{2} + \dots + \binom{h}{h} \binom{k}{h}$$

oder da

$$\binom{h}{m} = \binom{h}{h-m},$$

$$\binom{h}{h} \binom{k}{0} + \binom{h}{h-1} \binom{k}{1} + \binom{h}{h-2} \binom{k}{2} + \dots + \binom{h}{0} \binom{k}{h}.$$

Dieses ist aber in der That nichts anderes als  $\binom{h+k}{h}$  nach dem allgemeinen Satze

$$\binom{m+n}{r} = \binom{m}{0} \binom{n}{r} + \binom{m}{1} \binom{n}{r-1} + \binom{m}{2} \binom{n}{r-2} + \dots + \binom{m}{r} \binom{n}{0}.$$

Denn man erhält einerseits nach dem binomischen Lehrsatz

$$(1+z)^{m+n} = \binom{m+n}{0} + \binom{m+n}{1} z + \binom{m+n}{2} z^2 + \dots + \binom{m+n}{r} z^r + \dots$$

Andererseits erhält man  $(1+z)^{m+n}$ , wenn man die beiden Identitäten

$$(1+z)^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} z + \binom{m}{2} z^2 + \dots + \binom{m}{r} z^r + \dots$$

$$(1+z)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} z + \binom{n}{2} z^2 + \dots + \binom{n}{r} z^r + \dots$$

miteinander multipliziert. Setzt man in den beiden Entwick-

lungen von  $(1+z)^{m+n}$  die Koeffizienten von  $z^r$  einander gleich, so ergibt sich unmittelbar der zum Beweise gebrauchte Satz. Es wird nur vorausgesetzt, dass  $r$  eine positive ganze Zahl ist.<sup>3)</sup>

Bemerkenswert sind die beiden speciellen Fälle, welche sich für  $m = n = r$  und  $m = n, r = n - 1$  ergeben:

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 \quad 4)$$

$$\binom{2n}{n-1} = \binom{n}{0} \binom{n}{1} + \binom{n}{1} \binom{n}{2} + \binom{n}{2} \binom{n}{3} + \dots$$

#### § 4.

Bisher wurden Reihen summiert, welche nur die Binomialkoeffizienten mit geradem, resp. ungeradem Index enthielten. Es liegt nahe, durch Kombination der Gleichungen a, b, c, d, ... mit den Gleichungen a, b, c, d, ... Reihen aufzustellen und zu summieren, welche die Binomialkoeffizienten  $n$ -ter Potenz sowohl mit geradem, als ungeradem Index enthalten. Man findet aus

$$a + a: \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\text{oder} \quad \sum_{h=0}^{h=n} \binom{n}{0} \binom{n}{h} = \binom{n}{0} \cdot 2^n,$$

eine Identität, welche man bekanntlich direkt erhält, wenn man  $(1+1)^n$  nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt.

Ferner gewinnt man durch die Kombinationen

$$a + 2b + 2b: \quad \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + 3 \binom{n}{3} + 4 \binom{n}{4} + \dots = n \cdot 2^{n-1}$$

$$\text{oder} \quad \sum_{h=0}^{h=n} \binom{n}{1} \binom{n}{h} = \binom{n}{1} \cdot 2^{n-1}$$

$$b + 3b + 4c + 4c: \quad \binom{n}{2} + 3 \binom{n}{3} + 6 \binom{n}{4} + 10 \binom{n}{5} + \dots = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 2^{n-2}$$

$$\text{oder} \quad \sum_{h=0}^{h=n} \binom{n}{2} \binom{n}{h} = \binom{n}{2} \cdot 2^{n-2}$$

$$b + 4c + 8c + 8d + 8b: \binom{n}{3} + 4\binom{n}{4} + 10\binom{n}{5} + \dots = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2^{n-3}$$

$$\text{oder} \quad \sum_{h=0}^{h=n} \binom{h}{3} \binom{n}{h} = \binom{n}{3} \cdot 2^{n-3}.$$

## § 5.

Ganz allgemein gilt der Satz

$$\sum_{h=0}^{h=n} \binom{h}{m} \binom{n}{h} = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m}.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \binom{m+k}{m} \binom{n}{m+k} &= \frac{m+k}{1} \cdot \frac{m+k-1}{2} \dots \frac{k+1}{m} \times \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \dots \frac{n-m-k+1}{m+k} \\ &= \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \dots \frac{n-m+1}{m} \times \frac{n-m}{1} \cdot \frac{n-m-1}{2} \dots \frac{n-m-k+1}{k} \\ &= \binom{n}{m} \binom{n-m}{k}. \end{aligned}$$

Setzt man nun rechter Hand für  $k$  der Reihe nach  $0, 1, 2, 3, \dots, n-m$  und links  $h$  an die Stelle von  $m+k$ , so ist für  $h$  zu setzen  $m, m+1, \dots, n$ .

$$\text{Folglich} \quad \sum_{h=m}^{h=n} \binom{h}{m} \binom{n}{h} = \binom{n}{m} \sum_{k=0}^{k=n-m} \binom{n-m}{k}.$$

Da aber  $\binom{h}{m} = 0$  für  $h < m$  ist, so kann man für  $h$  der Reihe nach setzen  $0, 1, 2, 3, \dots, n$ . Da ferner nach § 4

$$\sum_{k=0}^{k=n-m} \binom{n-m}{k} = 2^{n-m}$$

$$\text{ist, so folgt} \quad \sum_{h=0}^{h=n} \binom{h}{m} \binom{n}{h} = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m}.$$

Der Satz ist nicht nur für  $n > m$ , sondern ganz allgemein für jedes positive ganzzahlige  $n$  richtig.  $n = m$  giebt identisch  $1 = 1$ ,  $n > m$  liefert identisch  $0 = 0$ .



§ 6.

Man kann nun ähnlich verfahren, wie bei den arithmetischen Reihen höherer Ordnung. So kann man z. B. die Binomialkoeffizienten  $n$ -ter Potenz der Reihe nach mit den Quadraten, Kuben u. s. w. der natürlichen Zahlen multiplizieren und die Produkte addieren.

$$\text{Es ist} \quad h^2 = 2 \binom{h}{2} + \binom{h}{1},$$

$$\text{folglich} \quad \sum_{h=0}^{h=n} h^2 \binom{n}{h} = 2 \sum_{h=0}^{h=n} \binom{h}{2} \binom{n}{h} + \sum_{h=0}^{h=n} \binom{h}{1} \binom{n}{h} = n(n+1) \cdot 2^{n-2}.$$

$$\text{Ferner ist} \quad h^3 = 6 \binom{h}{3} + 6 \binom{h}{2} + \binom{h}{1},$$

$$\begin{aligned} \text{folglich} \quad \sum_{h=0}^{h=n} h^3 \binom{n}{h} &= 6 \sum_{h=0}^{h=n} \binom{h}{3} \binom{n}{h} + 6 \sum_{h=0}^{h=n} \binom{h}{2} \binom{n}{h} + \sum_{h=0}^{h=n} \binom{h}{1} \binom{n}{h} \\ &= n^2(n+3) \cdot 2^{n-3}. \end{aligned}$$

In derselben Weise findet man

$$\sum_{h=0}^{h=n} h^4 \binom{n}{h} = n(n+1)(n^2+5n-2) \cdot 2^{n-4}$$

$$\sum_{h=0}^{h=n} h^5 \binom{n}{h} = n^2(n^3+10n^2+15n-10) \cdot 2^{n-5}$$

$$\sum_{h=0}^{h=n} h^6 \binom{n}{h} = n(n^5+15n^4+45n^3-15n^2-30n+16) \cdot 2^{n-6}$$

$$\sum_{h=0}^{h=n} h^7 \binom{n}{h} = n^2(n^5+21n^4+105n^3+35n^2-210n+112) \cdot 2^{n-7}$$

Da sich stets  $h^m$  als Reihe nach  $\binom{h}{m}, \binom{h}{m-1}, \dots, \binom{h}{1}$  darstellen lässt<sup>5)</sup>, kann die Rechnung mit Hilfe des Satzes in § 5 beliebig weit fortgesetzt werden.<sup>6)</sup>

§ 7.

Man kann auch mit einer beliebigen Potenz aus der natürlichen Zahlenreihe beginnen. Denn es ist

$$\sum_{h=0}^{h=n} (p+h)^m \binom{n}{h} = p^m \sum_{h=0}^{h=n} \binom{n}{h} + \binom{m}{1} p^{m-1} \sum_{h=0}^{h=n} h \binom{n}{h} + \binom{m}{2} p^{m-2} \sum_{h=0}^{h=n} h^2 \binom{n}{h} + \dots$$

wo die Summen auf der rechten Seite nach § 6 auszuführen sind.

Man erhält auf diese Weise

$$\sum_{h=0}^{h=n} (p+h) \binom{n}{h} = (n+2p) \cdot 2^{n-1}$$

$$\sum_{h=0}^{h=n} (p+h)^2 \binom{n}{h} = \left[ (n+2p)^2 + n \right] \cdot 2^{n-2}$$

$$\sum_{h=0}^{h=n} (p+h)^3 \binom{n}{h} = \left[ (n+2p)^3 + 3n(n+2p) \right] \cdot 2^{n-3}$$

$$\sum_{h=0}^{h=n} (p+h)^4 \binom{n}{h} = \left[ (n+2p)^4 + 6n(n+2p)^2 + n(3n-2) \right] \cdot 2^{n-4}$$

$$\sum_{h=0}^{h=n} (p+h)^5 \binom{n}{h} = \left[ (n+2p)^5 + 10n(n+2p)^3 + 5n(3n-2)(n+2p) \right] \cdot 2^{n-5}$$

$$\sum_{h=0}^{h=n} (p+h)^6 \binom{n}{h} = \left[ (n+2p)^6 + 15n(n+2p)^4 + 15n(3n-2)(n+2p)^2 + n(15n^2 - 30n + 16) \right] \cdot 2^{n-6}.$$

Sowohl diese Formeln als die in § 6 gelten ebenso allgemein für jedes  $n$ , wie der Satz in § 5, mit dessen Hilfe sie abgeleitet sind.

Beispiele.

$$n = 8, p = 1, m = 3: \sum_{h=0}^{h=8} (1+h)^3 \binom{8}{h} = 1240 \cdot 2^5$$

$$1 + 8 \cdot 8 + 27 \cdot 28 + 64 \cdot 56 + 125 \cdot 70 + 216 \cdot 56 + 343 \cdot 28 + 512 \cdot 8 + 729 = 39680.$$

$$n = 11, p = 3, m = 2: \sum_{h=0}^{h=11} (3 + h)^2 \binom{11}{h} = 300 \cdot 2^9$$

$$9 + 16 \cdot 11 + 25 \cdot 55 + 36 \cdot 165 + 49 \cdot 330 + 64 \cdot 462 + 81 \cdot 462 + 100 \cdot 330 + \\ + 121 \cdot 165 + 144 \cdot 55 + 169 \cdot 11 + 196 = 153600.$$

Es liegt nahe, zu untersuchen, ob die Entwicklung

$$\sum_{h=0}^{h=n} (p + h)^m \binom{n}{h} = \left[ z^m + \binom{m}{2} c_1 z^{m-2} + \binom{m}{4} c_2 z^{m-4} + \dots \right] \cdot 2^{n-m},$$

wo der Kürze wegen  $n + 2p = z$  gesetzt ist, allgemein gilt. Die Reihe in der Klammer bricht für  $m = 2u$  mit  $c_u$ , für  $m = 2u + 1$  mit  $\binom{m}{1} c_u z$  ab. Die Grössen  $c$  sind unabhängig von  $m$  und  $p$ , allein abhängig von  $n$ , und zwar ist  $c_h$  eine ganze rationale Funktion  $h$ -ten Grades von  $n$ .

In der That lässt sich die Richtigkeit dieser durch Induktion gefundenen allgemeinen Form in einfacher Weise zeigen.

$$\text{Es ist} \quad 2(p + h) = z + 2h - n$$

$$2^m (p + h)^m = z^m + \binom{m}{1} z^{m-1} (2h - n) + \binom{m}{2} z^{m-2} (2h - n)^2 + \\ + \binom{m}{3} z^{m-3} (2h - n)^3 + \dots \\ 2^m \sum_{h=0}^{h=n} (p + h)^m \binom{n}{h} = z^m \sum_{h=0}^{h=n} \binom{n}{h} + \binom{m}{1} z^{m-1} \sum_{h=0}^{h=n} (2h - n) \binom{n}{h} + \\ + \binom{m}{2} z^{m-2} \sum_{h=0}^{h=n} (2h - n)^2 \binom{n}{h} + \dots$$

Rechter Hand sind alle Summen von der Form

$$\sum_{h=0}^{h=n} (2h - n)^{2k+1} \binom{n}{h} = 0,$$

da die von den Enden gleich weit entfernten Glieder sich gegenseitig tilgen. Folglich ist die angenommene Form der Darstellung richtig. Es wird

$$2^n \cdot c_k = \sum_{h=0}^{h=n} (2h - n)^{2k} \binom{n}{h}.$$

Die successive Berechnung der Summen wird dadurch un-  
gemein vereinfacht. Für  $m = 2$  u ist nur  $c_u$  zu berechnen, die  
Summen für die ungeraden  $m$  werden ohne jede Rechnung ge-  
wonnen. So ist z. B. sofort hinzuschreiben

$$\sum_{h=0}^{h=n} (p+h)^7 \binom{n}{h} = \left[ (n+2p)^7 + 21n(n+2p)^5 + 35n(3n-2)(n+2p)^3 + \right. \\ \left. + 7n(15n^2 - 30n + 16)(n+2p) \right] 2^{n-7}.$$

### § 8.

Endlich kann man die Binomialkoeffizienten  $n$ -ter Potenz  
der Reihe nach mit den Gliedern irgend einer arithmetischen  
Reihe höherer Ordnung multiplizieren und die Produkte addieren.

Wenn das allgemeine Glied der arithmetischen Reihe  $m$ -ter  
Ordnung

$$t_h = a_0 h^m + a_1 h^{m-1} + a_2 h^{m-2} + \dots + a_{m-1} h + a_m$$

ist, so ist doch offenbar

$$\sum_{h=0}^{h=n} t_h \binom{n}{h} = a_0 \sum_{h=0}^{h=n} h^m \binom{n}{h} + a_1 \sum_{h=0}^{h=n} h^{m-1} \binom{n}{h} + \dots + a_m \sum_{h=0}^{h=n} \binom{n}{h},$$

wo die Summen auf der rechten Seite nach § 6 zu berechnen  
sind.

#### Beispiel.

$$\sum_{h=0}^{h=n} (h^2 + 5h - 3) \binom{n}{h} = \sum_{h=0}^{h=n} h^2 \binom{n}{h} + 5 \sum_{h=0}^{h=n} h \binom{n}{h} - 3 \sum_{h=0}^{h=n} \binom{n}{h} \\ = n(n+1) \cdot 2^{n-2} + 5n \cdot 2^{n-1} - 3 \cdot 2^n \\ = (n^2 + 11n - 12) \cdot 2^{n-2} = (n-1)(n+12) \cdot 2^{n-2}.$$

Man kann auch in folgender Weise zum Ziele kommen.  
Eine einfache Überlegung lehrt, dass

$$\sum_{h=0}^{h=n} (a_0 h^m + a_1 h^{m-1} + \dots + a_{m-1} h + a_m) \binom{n}{h} = F \cdot 2^{n-m}$$

werden muss, wo  $F$  eine ganz rationale Funktion  $m$ -ten Grades  
von  $n$  ist, welche mit  $a_0 n^m$  beginnt und mit  $a_m 2^m$  schliesst.

Man hat also noch die  $m - 1$  Koeffizienten der übrigen Potenzen von  $n$  zu bestimmen. Setzt man  $m - 1$  verschiedene spezielle Werte für  $n$ , so erhält man  $m - 1$  lineare Gleichungen zur Berechnung dieser Koeffizienten.

Beispiel.

Es soll 
$$\sum_{h=0}^{h=n} (h-1) (h-3) (h-5) \binom{n}{h}$$
 berechnet werden.

Die Summe sei

$$= (n^3 + \alpha_1 n^2 + \alpha_2 n - 120) \cdot 2^{n-3},$$

so geben  $n = 1$  und  $n = 2$  für  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  die beiden Gleichungen

$$\begin{array}{r} \alpha_1 + \alpha_2 = 59 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 44 \\ \hline \alpha_1 = -15, \alpha_2 = 74 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{also } \sum_{h=0}^{h=n} (h-1) (h-3) (h-5) \binom{n}{h} &= (n^3 - 15 n^2 + 74 n - 120) \cdot 2^{n-3} \\ &= (n-4) (n-5) (n-6) \cdot 2^{n-3}. \end{aligned}$$

## § 9.

Die in den beiden ersten §§ aufgestellten Gleichungen  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ... und  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ... welche nur die Binomialkoeffizienten mit geradem, resp. ungeradem Index enthalten, sind durchaus nicht für jedes  $n$  richtig. Dasselbe gilt von den durch Kombination am Schlusse der beiden §§ abgeleiteten Gleichungen. Nur  $a$  und  $\alpha$  gelten für sämtliche  $n$ ,  $b$  und  $\beta$  dagegen nur für  $n > 1$ ,  $c$  und  $\gamma$  nur für  $n > 2$ ,  $d$  und  $\delta$  nur für  $n > 3$  u. s. w.

So verschwindet z. B. für  $n = 2$  die linke Seite von  $c$ , während die rechte  $= -\frac{1}{8}$  wird. Für  $n = 1$  erhält man links 0, rechts  $-\frac{1}{16}$ .

Wenn  $c$  auch für  $n = 2$  gelten soll, so muss auf der rechten Seite noch ein Glied hinzukommen, welches für  $n > 2$  ver-

schwindet, aber für  $n = 2$  die Gleichung erfüllt. Es ist dies offenbar  $+\frac{1}{8}\binom{2}{n}$ . Soll  $c$  auch für  $n = 1$  gelten, so muss noch das Glied  $-\frac{3}{16}\binom{1}{n}$  auf der rechten Seite hinzukommen.

Auf diesem Wege gewinnt man die folgenden für jedes  $n$  geltenden Identitäten, wo  $\nu = \frac{n}{2}$  für ein gerades  $n$  und  $= \frac{n-1}{2}$  für ein ungerades  $n$  ist,

$$a_1) \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{n}{2h} = 2^{n-1}$$

$$b_1) \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{h}{1} \binom{n}{2h} = n \cdot 2^{n-3} - \frac{1}{4} \binom{1}{n}$$

$$c_1) \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{h}{2} \binom{n}{2h} = \frac{n}{2} \binom{n-3}{1} \cdot 2^{n-5} + \frac{1}{8} \binom{2}{n} - \frac{3}{16} \binom{1}{n}$$

$$d_1) \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{h}{3} \binom{n}{2h} = \frac{n}{3} \binom{n-4}{2} \cdot 2^{n-7} - \frac{1}{16} \binom{3}{n} + \frac{1}{8} \binom{2}{n} - \frac{3}{32} \binom{1}{n}$$

$$e_1) \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{h}{4} \binom{n}{2h} = \frac{n}{4} \binom{n-5}{3} \cdot 2^{n-9} + \frac{1}{32} \binom{4}{n} - \frac{5}{64} \binom{3}{n} + \frac{11}{128} \binom{2}{n} - \frac{11}{256} \binom{1}{n}.$$

Ferner gelten allgemein für die Binomialkoeffizienten mit ungeradem Index die folgenden Identitäten, wo  $\nu = \frac{n}{2} - 1$  für ein gerades  $n$  und  $= \frac{n-1}{2}$  für ein ungerades  $n$  ist,

$$a_1) \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{n}{2h+1} = 2^{n-1}$$

$$b_1) \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{h}{1} \binom{n}{2h+1} = \binom{n-2}{1} \cdot 2^{n-3} + \frac{1}{4} \binom{1}{n}$$

$$c_1) \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{h}{2} \binom{n}{2h+1} = \binom{n-3}{2} \cdot 2^{n-5} - \frac{1}{8} \binom{2}{n} + \frac{1}{16} \binom{1}{n}$$

$$d_1) \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{h}{3} \binom{n}{2h+1} = \binom{n-4}{3} \cdot 2^{n-7} + \frac{1}{16} \binom{3}{n} - \frac{1}{16} \binom{2}{n} + \frac{3}{32} \binom{1}{n}$$

$$e_1) \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{h}{4} \binom{n}{2h+1} = \binom{n-5}{4} \cdot 2^{n-9} - \frac{1}{32} \binom{4}{n} + \frac{3}{64} \binom{3}{n} - \frac{9}{128} \binom{2}{n} - \frac{3}{256} \binom{1}{n}.$$


---

## § 10.

Aus diesen Identitäten kann man zunächst diejenigen finden, welche die Binomialkoeffizienten mit geradem, resp. ungeradem Index enthalten, jeden multipliziert in eine Potenz seines Index.

Man findet für die Binomialkoeffizienten mit geradem Index

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h) \binom{n}{2h} = n \cdot 2^{n-2} - \frac{1}{2} \binom{1}{n}$$

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h)^2 \binom{n}{2h} = n(n+1) \cdot 2^{n-3} + \binom{2}{n} - \frac{5}{2} \binom{1}{n}$$

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h)^3 \binom{n}{2h} = n^2(n+3) \cdot 2^{n-4} - 3 \binom{3}{n} + 12 \binom{2}{n} - \frac{31}{2} \binom{1}{n}$$

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{h=\nu} (2h)^4 \binom{n}{2h} &= n(n+1)(n^2+5n-2) \cdot 2^{n-5} + 12 \binom{4}{n} - 66 \binom{3}{n} + \\ &+ 133 \binom{2}{n} - \frac{233}{2} \binom{1}{n}. \end{aligned}$$

Die Ableitung dieser Identitäten ist dieselbe wie in § 6. So findet man z. B.

$$(2h)^3 = 48 \binom{h}{3} + 48 \binom{h}{2} + 8 \binom{h}{1}$$

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h)^3 \binom{n}{2h} = 48 \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{h}{3} \binom{n}{2h} + 48 \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{h}{2} \binom{n}{2h} + 8 \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{h}{1} \binom{n}{2h}$$

und dann nach § 9 die obige Gleichung.

Für die Binomialkoeffizienten mit ungeradem Index erhält man

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h+1) \binom{n}{2h+1} = n \cdot 2^{n-2} + \frac{1}{2} \binom{1}{n}$$

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h+1)^2 \binom{n}{2h+1} = n(n+1) \cdot 2^{n-3} - \binom{2}{n} + \frac{5}{2} \binom{1}{n}$$

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h+1)^3 \binom{n}{2h+1} = n^2(n+3) \cdot 2^{n-4} + 3 \binom{3}{n} - 12 \binom{2}{n} + \frac{31}{2} \binom{1}{n}$$

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h+1)^4 \binom{n}{2h+1} = n(n+1)(n^2+5n-2) \cdot 2^{n-5} - 12 \binom{4}{n} + 66 \binom{3}{n} - 133 \binom{2}{n} + \frac{233}{2} \binom{1}{n}.$$

$\nu$  hat hier, wie auch überall im folgenden, dieselbe Bedeutung wie in § 9. Die Formeln gelten allgemein für jedes positive ganzzahlige  $n$ . Es entsprechen diese beiden Formelgruppen den in § 6 für die sämtlichen Binomialkoeffizienten aufgestellten Gleichungen.

Man kann auch hier mit einer beliebigen Potenz aus der natürlichen Zahlenreihe beginnen. Man findet z. B.

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h+1)^3 \binom{n}{2h} = \left[ (n+2)^3 + 3n(n+2) \right] \cdot 2^{n-4} - 3 \binom{3}{n} + 15 \binom{2}{n} - \frac{49}{2} \binom{1}{n}$$

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h+2)^3 \binom{n}{2h+1} = \left[ (n+2)^3 + 3n(n+2) \right] \cdot 2^{n-4} + 3 \binom{3}{n} - 15 \binom{2}{n} + \frac{49}{2} \binom{1}{n}.$$

## § 11.

Wenn  $n > m$  ist, so ist stets

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{2h}{m} \binom{n}{2h} = \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{2h+1}{m} \binom{n}{2h+1} = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m-1}.$$

Beweis. Allgemein ist für jedes  $m, n$  und  $h$

$$\begin{aligned} \binom{2h}{m} \binom{n}{2h} &= \frac{2h}{1} \cdot \frac{2h-1}{2} \cdots \frac{2h-m+1}{m} \times \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{n-2h+1}{2h} \\ &= \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{n-m+1}{m} \times \frac{n-m}{1} \cdot \frac{n-m-1}{2} \cdots \frac{n-2h+1}{2h-m} \\ &= \binom{n}{m} \binom{n-m}{2h-m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{n-2h}, \end{aligned}$$



$$\text{also} \quad \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{2h}{m} \binom{n}{2h} = \binom{n}{m} \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{n-m}{n-2h}.$$

Die Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung ist, je nachdem  $n$  gerade oder ungerade ist, mit Hilfe von  $a_1$  oder  $a_1$  in § 9 zu bestimmen. In beiden Fällen erhält man aber, wenn  $n-m$  eine positive ganze Zahl ist, d. h.  $n > m$  ist, denselben Wert, nämlich  $2^{n-m-1}$ . Daher

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{2h}{m} \binom{n}{2h} = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m-1} \text{ für } n > m.$$

Ganz ebenso wird bewiesen, dass

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{2h+1}{m} \binom{n}{2h+1} = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m-1},$$

aber ebenfalls nur unter der Voraussetzung, dass  $n-m$  eine positive ganze Zahl ist, d. h.  $n > m$ .

## § 12.

Wenn man je zwei entsprechende Gleichungen der beiden Gruppen in § 10 addiert, so erhält man genau die Identitäten in § 6. Die Aggregate der Glieder in  $\binom{1}{n}, \binom{2}{n}, \binom{3}{n}, \dots$  heben sich in der Summe gegenseitig weg. Die schon bekannte Thatsache, dass die Identitäten in § 6 allgemein für jedes  $n$  gelten, wird dadurch nur bestätigt.

Subtrahiert man dagegen je zwei entsprechende Gleichungen in § 10, so erhält man, wenn man noch  $a_1 - a_1$  hinzunimmt,

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{n}{2h} - \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{n}{2h+1} = \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{n}{h} = 0,$$

was bekanntlich auch direkt durch Entwicklung von  $(1-1)^n$  folgt,

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{n}{2h} - \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{n}{2h+1} = - \binom{n}{n}$$

oder 
$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h h \binom{n}{h} = 0 \quad \text{für } n > 1,$$

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h)^2 \binom{n}{2h} - \sum_{h=0}^{h=\nu} (2h+1)^2 \binom{n}{2h+1} = 2 \binom{2}{n} - 5 \binom{1}{n}$$

oder 
$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h h^2 \binom{n}{h} = 0 \quad \text{für } n > 2,$$

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h)^3 \binom{n}{2h} - \sum_{h=0}^{h=\nu} (2h+1)^3 \binom{n}{2h+1} = -6 \binom{3}{n} + 24 \binom{2}{n} - 31 \binom{1}{n}$$

oder 
$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h h^3 \binom{n}{h} = 0 \quad \text{für } n > 3,$$

endlich

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{h=\nu} (2h)^4 \binom{n}{2h} - \sum_{h=0}^{h=\nu} (2h+1)^4 \binom{n}{2h+1} &= 24 \binom{4}{n} - 132 \binom{3}{n} + \\ &+ 226 \binom{2}{n} - 233 \binom{1}{n} \end{aligned}$$

oder 
$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h h^4 \binom{n}{h} = 0 \quad \text{für } n > 4.$$

### § 13.

Addiert man die beiden Summen in § 11, welche für  $n > m$  gleichen Wert haben, so erhält man

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{2h}{m} \binom{n}{2h} + \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{2h+1}{m} \binom{n}{2h+1} = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m}$$

oder 
$$\sum_{h=0}^{h=n} \binom{h}{m} \binom{n}{h} = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m}.$$

Nach § 5 gilt diese Gleichung allgemein für jedes  $n$ . Dieses ist nur möglich, wenn für jedes  $n$

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{2h}{m} \binom{n}{2h} = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m-1} + R$$

$$\sum_{h=0}^{h=r} \binom{2h+1}{m} \binom{n}{2h+1} = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m-1} - R$$

ist.  $R$  ist ein Aggregat von Gliedern in  $\binom{1}{n}, \binom{2}{n}, \binom{3}{n}, \dots, \binom{m}{n}$ ,  
verschwindet also für  $n > m$ .

$$\text{Daher } \sum_{h=0}^{h=r} \binom{2h}{m} \binom{n}{2h} - \sum_{h=0}^{h=r} \binom{2h+1}{m} \binom{n}{2h+1} = 2R$$

oder 
$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{m} \binom{n}{h} = 0 \quad \text{für } n > m.$$

#### § 14.

Der zuletzt gefundene Satz kann verallgemeinert:

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{p+h}{m} \binom{n}{h} = 0 \quad \text{für } n > m$$

und so ausgesprochen werden:

Wenn man die Binomialkoeffizienten  $n$ -ter Potenz unter ebenso viele aufeinander folgende figurierte Zahlen  $m$ -ter Ordnung schreibt und paarweise multipliziert, so ist die Summe dieser Produkte mit abwechselnden Vorzeichen gleich Null, wenn  $n > m$  ist.

Beweis. Nach dem zum Beweise von § 3 gebrauchten Satze ist

$$\binom{p+h}{m} = \binom{h}{m} + \binom{p}{1} \binom{h}{m-1} + \binom{p}{2} \binom{h}{m-2} + \dots + \binom{p}{m}$$

folglich

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{p+h}{m} \binom{n}{h} &= \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{m} \binom{n}{h} + \binom{p}{1} \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{m-1} \binom{n}{h} + \dots \\ &\quad + \binom{p}{m} \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{n}{h} = 0, \end{aligned}$$

da die Summen auf der rechten Seite nach § 13 für  $n > m$  sämtlich verschwinden.<sup>7)</sup>

Beispiel.  $n = 4$ ,  $m = 2$ ,  $p = 2$ :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ \hline 1 & -12 & +36 & -40 & +15 & = 0. \end{array}$$

Man kann die Binomialkoeffizienten gegen die figurirten Zahlen beliebig nach rechts verschieben. Es ist das gleichbedeutend mit einem Wachsen von  $p$ , wodurch nichts geändert wird:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 \\ & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ \hline & & 6 & -40 & +90 & -84 & +28 & = 0. \end{array}$$

Dagegen kann man die Binomialkoeffizienten nicht beliebig nach links verschieben. Es dürfen nicht mehr als  $m$  Binomialkoeffizienten nach links über die figurirten Zahlen hinausgehen. So giebt

$$\begin{array}{cccccc} & & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ \hline & & 6 & -12 & +6 & = 0 \end{array}$$

während

$$\begin{array}{cccccc} & & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ \hline & & 4 & -3 & = 1 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & & \\ \hline & & & & 15 & -18 & +6 & = 3. \end{array}$$

## § 15.

Für jedes  $n$  gilt der Satz:

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^{n+h} \binom{p+h}{n} \binom{n}{h} = 1$$

d. h.: Schreibt man die Binomialkoeffizienten  $n$ -ter Potenz unter ebenso viele aufeinander folgende figurirte Zahlen  $n$ -ter Ordnung und multipliziert paarweise, so ist die Summe der Produkte mit abwechselnden Vorzeichen der Einheit gleich. Das Vorzeichen des ersten Summanden ist  $(-1)^n$ .

Beweis.

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{p+h}{n} \binom{n}{h} = \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{n} \binom{n}{h} + \binom{p}{1} \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{n-1} \binom{n}{h} +$$

$$+ \binom{p}{2} \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{n-2} \binom{n}{h} + \dots$$

Die Summen auf der rechten Seite verschwinden nach § 13 sämtlich bis auf die erste, und von dieser verschwinden alle Glieder bis auf das letzte, welches den Wert  $(-1)^n$  hat. Multipliziert man mit  $(-1)^n$ , so folgt die Behauptung.

Beispiele.  $n = 4, p = 4$ :

1	5	15	35	70	126	210
1	4	6	4	1		
<hr/>						
1 - 20 + 90 - 140 + 70 = 1						

oder mit beliebiger Verschiebung der Binomialkoeffizienten nach rechts

1	5	15	35	70	126	210
		1	4	6	4	1
<hr/>						
15 - 140 + 420 - 504 + 210 = 1						

$n = 3, p = 4$ :

1	4	10	20	35	56
	1	3	3	1	
<hr/>					
- 4 + 30 - 60 + 35 = 1.					

Über das Verschieben der Binomialkoeffizienten nach links ist dasselbe wie in § 14 zu bemerken. Doch müssen die ausfallenden Summanden durch  $\pm 0$  ergänzt werden, z. B.

			1	7	28	84	210
1	6	15	20	15	6	1	
<hr/>							
+ 0 - 0 + 0 - 20 + 105 - 168 + 84 = 1.							

§ 16.

Ferner gilt der Satz:

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^{n+h} \binom{p+h}{n+k} \binom{n}{h} = \binom{p}{k}$$

d. h.: Wenn man die Binomialkoeffizienten  $n$ -ter Potenz unter ebenso viele aufeinander folgende figurierte Zahlen  $(n+k)$ -ter

Ordnung, mit der  $m$ -ten figurirten Zahl beginnend, schreibt und paarweise multipliziert, so ist die Summe der Produkte mit abwechselnden Vorzeichen gleich der  $(m+n)$ -ten figurirten Zahl  $k$ -ter Ordnung. Das Vorzeichen des ersten Summanden ist  $(-1)^n$ .<sup>8)</sup>

Beweis.

$$\binom{p+h}{n+k} = \binom{h}{n+k} + \binom{p}{1} \binom{h}{n+k-1} + \dots + \binom{p}{k} \binom{h}{n} + \binom{p}{k+1} \binom{h}{n-1} + \dots + \binom{p}{n-k} ,$$

folglich

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{p+h}{n+k} \binom{n}{h} = \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{n+k} \binom{n}{h} + \binom{p}{1} \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{n+k-1} \binom{n}{h} + \dots$$

$$+ \dots + \binom{p}{k} \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{n} \binom{n}{h} + \binom{p}{k+1} \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{n-1} \binom{n}{h} + \dots + \binom{p}{n-k} \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{n-k} \binom{n}{h} .$$

Die  $k$  ersten Summen auf der rechten Seite verschwinden, da in ihnen jedes Glied für sich verschwindet. Ferner verschwinden die  $n$  letzten Summen nach § 13. Folglich bleibt nur

$$\binom{p}{k} \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{n} \binom{n}{h} \text{ übrig.}$$

Nach § 15 ist der Wert dieses Ausdrucks  $(-1)^n \binom{p}{k}$ . Multipliziert man mit  $(-1)^n$ , so folgt die Behauptung.

Beispiele.  $n = 4, k = 1, m = 1$ :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ \hline 1 - 24 + 126 - 224 + 126 = 5 \end{array}$$

$n = 3, k = 2, m = 2$ :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 \\ & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ \hline - 6 + 63 - 168 + 126 = 15. \end{array}$$

Über die Verschiebung der Binomialkoeffizienten nach links ist dieselbe Bemerkung wie in § 15 zu machen.

§ 14 lehrt, dass der Satz auch für  $k = 0$  gilt, und § 15, dass er auch für negative  $k$  richtig ist. Denn es ist  $\binom{p}{0} = 1$  und  $\binom{p}{-k} = 0$ . Die beiden genannten §§ erscheinen also als specielle Fälle dieses allgemeinen Satzes.

§ 17.

Wenn  $n > m$  ist, so ist

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h h^m \binom{n}{h} = 0.$$

Beweis. Stets lässt sich die Entwicklung ausführen

$$h^m = m! \binom{h}{m} + a_1 \binom{h}{m-1} + a_2 \binom{h}{m-2} + \dots$$

folglich

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h h^m \binom{n}{h} &= m! \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{m} \binom{n}{h} + a_1 \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{m-1} \binom{n}{h} + \\ &+ a_2 \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{m-2} \binom{n}{h} + \dots = 0, \end{aligned}$$

da für  $n > m$  die Summen auf der rechten Seite nach § 13 sämtlich verschwinden.

In § 12 wurde der Satz bereits für den Fall bewiesen, dass  $n$  die Werte 1, 2, 3, 4 hat.

§ 18.

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^{n+h} (p+h)^n \binom{n}{h} = n!$$

d. h.: Schreibt man die Binomialkoeffizienten  $n$ -ter Potenz unter ebenso viele aufeinander folgende Glieder der  $n$ -ten Potenzreihe der natürlichen Zahlen und multipliziert paarweise, so ist die Summe der Produkte mit abwechselnden Vorzeichen gleich dem Produkte der  $n$  ersten natürlichen Zahlen. Das Vorzeichen des ersten Summanden ist  $(-1)^n$ .

$$\text{Beweis. } (h+p)^n = h^n + \binom{n}{1} h^{n-1} p + \binom{n}{2} h^{n-2} p^2 + \dots$$

folglich

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h (h+p)^n \binom{n}{h} &= \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h h^n \binom{n}{h} + \binom{n}{1} p \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h h^{n-1} \binom{n}{h} + \\ &+ \binom{n}{2} p^2 \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h h^{n-2} \binom{n}{h} + \dots \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite verschwinden nach § 17 alle Summen bis auf die erste. Es sei nun

$$h^n = n! \binom{h}{n} + \alpha_1 \binom{h}{n-1} + \alpha_2 \binom{h}{n-2} + \dots$$

so ist

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h h^n \binom{n}{h} &= n! \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{n} \binom{n}{h} + \alpha_1 \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{n-1} \binom{n}{h} + \\ &+ \alpha_2 \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{n-2} \binom{n}{h} + \dots \end{aligned}$$

Die erste Summe auf der rechten Seite hat nach § 15 den Wert  $(-1)^n$ , die übrigen Summen verschwinden nach § 13. Wenn man daher mit  $(-1)^n$  multipliziert, so erhält man

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^{n+h} (h+p)^n \binom{n}{h} = n!$$

Zusatz. Ganz ebenso wird der allgemeinere Satz bewiesen:

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^{n+h} (p + hq)^n \binom{n}{h} = n! q^n$$

d. h.: Schreibt man die Binomialkoeffizienten  $n$ -ter Potenz unter die  $n$ -ten Potenzen der Glieder irgend einer arithmetischen Reihe erster Ordnung und multipliziert paarweise, so ist die Summe der Produkte mit abwechselnden Vorzeichen gleich dem Produkte der  $n$  ersten natürlichen Zahlen, multipliziert mit der  $n$ -ten Potenz der Differenz der arithmetischen Reihe. Das Vorzeichen des ersten Summanden ist wieder  $(-1)^n$ .

Beispiele.  $n = 3$ ,  $p = 1$ ,  $q = 3$ :

1	64	343	1000
1	3	3	1
<div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> <span>— 1 + 192 — 1029 + 1000 = 162</span> </div>			

$n = 4$ ,  $p = 1$ ,  $q = 1$ :

1	16	81	256	625	1296
1	4	6	4	1	
<div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> <span>1 — 64 + 486 — 1024 + 625 = 24.</span> </div>					



Da das Resultat von  $p$  unabhängig ist, kann man die Binomialkoeffizienten beliebig nach rechts oder links verschieben, nur muss die Reihe in demselben Sinne fortgesetzt werden:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & 16 & 81 & 256 & 625 & 1296 & 2401 \\
 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 \hline
 & & 81 & - 1024 & + 3750 & - 5184 & + 2401 = 24 \\
 \\ 
 1 & 0 & 1 & 16 & 81 & 256 & 625 \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
 \hline
 1 & - 0 & + 6 & - 64 & + 81 = 24
 \end{array}$$

$n = 6, p = 7843, q = 1:$

$$\begin{aligned}
 & 7843^6 - 6 \cdot 7844^6 + 15 \cdot 7845^6 - 20 \cdot 7846^6 + 15 \cdot 7847^6 - \\
 & \quad - 6 \cdot 7848^6 + 7849^6 = 720.
 \end{aligned}$$

### § 19.

Der Satz in § 17 lässt sich dahin verallgemeinern:

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h (p+h)^m \binom{n}{h} = 0, \text{ wenn } n > m \text{ ist,}$$

und so aussprechen:

Wenn man die Binomialkoeffizienten  $n$ -ter Potenz unter ebenso viele Glieder der  $m$ -ten Potenzreihe der natürlichen Zahlen schreibt und paarweise multipliziert, so ist die Summe der Produkte mit abwechselnden Vorzeichen gleich Null, wenn  $n > m$  ist.

Beweis.

$$\begin{aligned}
 (h+p)^m &= h^m + \binom{m}{1} h^{m-1} p + \binom{m}{2} h^{m-2} p^2 + \dots \\
 \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h (h+p)^m \binom{n}{h} &= \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h h^m \binom{n}{h} + \binom{m}{1} p \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h h^{m-1} \binom{n}{h} + \\
 & \quad + \binom{m}{2} p^2 \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h h^{m-2} \binom{n}{h} + \dots = 0,
 \end{aligned}$$

da die Summen auf der rechten Seite nach § 17 für  $n > m$  sämtlich verschwinden.

**Zusatz.** In derselben Weise beweist man den allgemeineren Satz:

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h (p + hq)^m \binom{n}{h} = 0 \quad \text{für } n > m$$

d. h.: Der obige Satz gilt auch, wenn an die Stelle der natürlichen Zahlen die Glieder irgend einer arithmetischen Reihe erster Ordnung treten.<sup>9)</sup>

Beispiele.  $n = 5, m = 2, p = q = 1$ :

1	4	9	16	25	36
1	5	10	10	5	1
<hr/>					
1	— 20	+ 90	— 160	+ 125	— 36 = 0

oder mit einer beliebigen Verschiebung der Binomialkoeffizienten nach rechts oder links:

16	25	36	49	64	81
1	5	10	10	5	1
<hr/>					
16	— 125	+ 360	— 490	+ 320	— 81 = 0

4	1	0	1	4	9
1	5	10	10	5	1
<hr/>					
4	— 5	+ 0	— 10	+ 20	— 9 = 0

$n = 6, m = 5, p = 3125, q = 67$ :

$$3125^5 - 6 \cdot 3192^5 + 15 \cdot 3259^5 - 20 \cdot 3326^5 + 15 \cdot 3393^5 - 6 \cdot 3460^5 + 3527^5 = 0.$$

## § 20.

Endlich gilt der Satz:

Wenn man die Binomialkoeffizienten  $n$ -ter Potenz unter ebenso viele aufeinander folgende Glieder irgend einer arithmetischen Reihe  $m$ -ter Ordnung schreibt und paarweise multi-

pliziert, so ist die Summe dieser Produkte mit abwechselnden Vorzeichen gleich Null, wenn  $n > m$  ist.

Beweis. Das allgemeine Glied der arithmetischen Reihe  $m$ -ter Ordnung sei

$$t_h = a_0 h^m + a_1 h^{m-1} + a_2 h^{m-2} + a_3 h^{m-3} + \dots + a_{m-1} h + a_m,$$

so ist

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h t_h \binom{n}{h} &= a_0 \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h h^m \binom{n}{h} + a_1 \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h h^{m-1} \binom{n}{h} + \\ &+ a_2 \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h h^{m-2} \binom{n}{h} + \dots = 0, \end{aligned}$$

da die Summen auf der rechten Seite nach § 17 für  $n > m$  alle verschwinden.<sup>10)</sup>

Beispiel.  $n = 4, m = 2, t_h = (h + 1) (2h + 1)$

1	6	15	28	45	66	91	...
1	4	6	4	1			
1 - 24 + 90 - 112 + 45 = 0							

oder mit einer beliebigen Verschiebung der Binomialkoeffizienten nach rechts:

1	6	15	28	45	66	91	...
		1	4	6	4	1	
15 - 112 + 270 - 264 + 91 = 0.							

Der Satz gilt auch für eine beliebige Verschiebung der Binomialkoeffizienten nach links, nur ist die arithmetische Reihe dann in derselben Richtung fortzusetzen:

...	10	3	0	1	6	15	28	..
	1	4	6	4	1			
10 - 12 + 0 - 4 + 6 = 0.								

Wenn man für die figurirten Zahlen die Bedingung, dass die erste figurirte Zahl einer jeden Ordnung die Einheit ist, fallen lässt und sie einfach als Glieder einer arithmetischen Reihe betrachtet, welche nach links und rechts beliebig fortgesetzt werden kann, so fallen die Bedenken in den §§ 14, 15, 16 fort. Man erhält in der That

$$\begin{array}{cccccccccc}
 \dots & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & \dots \\
 & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
 \hline
 & & & 1 & - 0 & + 0 & - 4 & + 3 & = 0 & & 
 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{cccccccccc}
 \dots & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & \dots \\
 & & & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\
 \hline
 & & & 3 & - 6 & + 0 & - 0 & + 15 & - 18 & + 6 & = 0
 \end{array}$$

Die in den §§ 13, 14, 17, 19 aufgestellten Sätze sind nur specielle Fälle des letzten allgemeinen Satzes.



## Anmerkungen.

1) Die Ordnung der figurirten Zahlen wird hier, wie überall im folgenden, ebenso festgesetzt, wie Cauchy in seiner algebraischen Analysis und neuerdings Baltzer, Lieber und Lühmann, Mehler u. a. es thun. Die figurirten Zahlen  $m$ -ter Ordnung bilden die Reihe

$$\binom{m}{m}, \binom{m+1}{m}, \binom{m+2}{m}, \binom{m+3}{m}, \dots, \binom{m+h}{m}.$$

Nur dann herrscht Übereinstimmung mit den arithmetischen Reihen höherer Ordnung.

Allgemein festzustehen scheint nur die Bedingung, dass die erste figurirte Zahl einer jeden Ordnung die Einheit ist. Im übrigen werden sowohl Ordnung als Begriff der figurirten Zahlen verschieden definiert.

2) Eytelwein, alg. Analysis pag. 59, stellt umgekehrt erst die Reihen  $a, b, c \dots$  auf und beweist dann mittels des Schlusses von  $h$  auf  $h+1$  die Richtigkeit des allgemeinen Satzes, den auch Stern in Crelles Journal X. giebt. Es fehlt die Bemerkung, dass diese Summen nicht für jedes  $n$  gelten. Die Reihen  $a, b, c \dots$  finden sich bei Eytelwein nicht, auch nicht der allgemeine Satz in § 1.

Die Entwicklungen der §§ 1 und 2 sind in derselben Weise gegeben, in welcher die beiden allgemeinen Sätze von mir gefunden wurden. Es ist die einfachste Demonstration, welche ich entdecken konnte.

3) Hindenburg, Archiv der reinen u. angew. Math. 1797 pag. 318, beweist den Satz in derselben Weise wie oben und giebt ihn in den von ihm eingeführten Symbolen:

$$\begin{aligned} {}^{m+n}\mathfrak{N} = 1. \quad {}^n\mathfrak{N} + {}^m\mathfrak{A}. \quad {}^{n-1}\mathfrak{N} + {}^m\mathfrak{B}. \quad {}^{n-2}\mathfrak{N} + {}^m\mathfrak{C}. \quad {}^{n-3}\mathfrak{N} + {}^m\mathfrak{D}. \quad {}^{n-4}\mathfrak{N} + \dots \\ \dots + {}^{n-1}\mathfrak{N}. \quad {}^n\mathfrak{A} + {}^m\mathfrak{N}. \quad 1. \end{aligned}$$

Vor Hindenburg haben Euler in den Act. Petrop. 1781: de mirabilibus proprietatibus unciarum binom. etc. und dann Buzengeiger in Hindenburgs Archiv 1797 pag. 163 den Satz für den speciellen Fall  $r=n$  bewiesen. Buzengeiger hielt diesen einfachen Fall für so wichtig, dass er nicht weniger als drei Beweise beibringt.

Übrigens gilt der viel allgemeinere Satz

$$\binom{m}{r} \binom{n}{0} + \binom{m-p}{r-1} \binom{n+p}{1} + \binom{m-2p}{r-2} \binom{n+2p}{2} + \binom{m-3p}{r-3} \binom{n+3p}{3} + \dots$$

$$= \binom{m+n}{r} \cdot \sum_{h=0}^{h=r} \frac{\binom{r}{h}}{\binom{m+n}{h}} \cdot p^h.$$

Der zum Beweise von § 3 gebrauchte Satz ist der specielle Fall  $p = 0$ . Doch liegen solche Untersuchungen nicht in dem Plane dieser Programmbeilage.

4) Lagrange fand durch Zufall diesen merkwürdigen Satz, ohne ihn beweisen zu können. Euler und Buzengeiger lieferten dann an genanntem Orte den Beweis. Hindenburg fügt noch den Wortlaut zweier Sätze hinzu, welche in moderner Bezeichnungsweise lauten:

$$\binom{2m}{2n} = \binom{m}{n}^2 + 2 \left[ \binom{m}{n-1} \binom{m}{n+1} + \binom{m}{n-2} \binom{m}{n+2} + \binom{m}{n-3} \binom{m}{n+3} + \dots \right]$$

$$\binom{2m}{2n-1} = 2 \left[ \binom{m}{n-1} \binom{m}{n} + \binom{m}{n-2} \binom{m}{n+1} + \binom{m}{n-3} \binom{m}{n+2} + \dots \right]$$

5) Die Litteratur über die Darstellung einer Potenz durch Faktorenfolgen ist sehr reichhaltig. Zuerst dürfte sich Stirling, methodus differentialis etc., Lond. 1730, mit diesem Gegenstande beschäftigt haben.

6) Die ersten drei Reihen dieses § finden sich, auf anderem Wege bewiesen, auch bei Eytelwein, alg. Analysis pag. 52. Doch ist die Summe der dritten Reihe dort falsch angegeben:

$$1^4 \binom{n}{1} + 2^4 \binom{n}{2} + 3^4 \binom{n}{3} + \dots = n(n^3 + 6n^2 + 1) \cdot 2^{n-4}.$$

Der oben gegebene Ausdruck ist der richtige.

7) Vergl. Cauchy, alg. Analysis pag. 379, die älteste Quelle, welche ich für diesen interessanten Satz habe entdecken können. In neuerer Zeit ist der Satz zweimal von Matthiessen veröffentlicht worden, in der Zeitschrift f. Math. u. Phys. 1867 und im Schlüssel zu Heis § 93. Die Verschiebung der Binomialkoefficienten nach links ist nur mit obiger Einschränkung gestattet. Der Beweis wird überall anders als oben geführt.

8) Buzengeiger, Hindenb. Archiv 1797 pag. 169, findet gelegentlich auf ganz anderem Wege den Satz für den speciellen Fall  $n + k = p$ , d. h. wenn mit der ersten figurirten Zahl begonnen wird. Auch das Vorzeichen wird korrekt angegeben. Buzengeiger hat die Hindenburg'sche Bezeichnungsweise adoptiert und giebt den Satz in der Form

$$1 - \alpha \mathfrak{A} \cdot \beta + 1 \mathfrak{A} + \alpha \mathfrak{B} \cdot \beta + 2 \mathfrak{B} \dots \pm 1. \alpha + \beta \mathfrak{A} = \pm \beta \mathfrak{A}.$$

9) Die Sätze in den §§ 17—19 finden sich vielfach in Lehrbüchern und Abhandlungen. So leitet z. B. Sturm, cours d'analyse § 733, die beiden Sätze in § 18 und einen speciellen Fall von § 17 mit Hilfe des Calcul des différences finies ab. Die Sätze werden nicht immer vollständig und auch nicht immer ganz korrekt angeführt. Durchweg geschieht die Ableitung mittels der Differenzenrechnung.

10) Vergl. Klügel, math. Wörterbuch Artikel „arithmetische Reihen höherer Ordnung“. Der Satz wird dort durch Untersuchung der Differenzenreihen für  $n - m = 1$  bewiesen. In dem Artikel „Potenz“ wird umgekehrt geschlossen: wenn

$$a - \binom{n}{1} b + \binom{n}{2} c - \binom{n}{3} d + \dots = 0,$$

so sind  $a, b, c, d \dots$  Glieder einer arithmetischen Reihe  $(n-1)$ -ter Ordnung, ein offenbar unkorrekter Schluss. Leider ist dies nicht der einzige und auch nicht der erheblichste Fehler dieses Buches.

In Moivres doctrine of chances 1717 wird jener von Klügel angeführte specielle Fall des allgemeinen Satzes benutzt, um irgend ein Glied einer arithmetischen Reihe  $(n-1)$ -ter Ordnung aus den  $n$  vorhergehenden Gliedern zu finden.













~~JUL 5 '55 H~~